УДК 518.74

Олександр В. Лялецький,
Андрій Ю. Паскевич

Про деякі стратегії пошуку логічного виводу, керовані цілями.

Для пропозиційної логіки сформульовано дві стратегії, задані у формі спеціальних секвенційних числень. Наведено деякі результати щодо їхньої коректності та повноти, та проведено порівняння запропонованих числень. Показано, що жодне з них не має переваги над іншим з точки зору побудови мінімальних виводів.

Ключові слова: пошук логічного виводу, автоматичне доведення теорем.

Alexander V. Lyaletski,
Andrey Yu. Paskevich

On some strategies of logical inference search that are driven by goals.

Two strategies for inference search in propositional logic are presented in the form of special sequential calculi. Some results on their soundness and completeness are given, and comparison of the calculi is made. It is shown that no one of them can be preferred to another in the sense of constructing minimal inferences.

Key Words: logical inference search, automated theorem proving.

У програмі автоматизації доведень теорем у математиці, що була започаткована академіком В.М. Глушковим у середині 1960-х років та отримала назву Алгоритму Очевидності (АО) [1], особлива увага приділялась можливості (інтерактивного) керування стратегіями пошуку виводу. Вже перша евристична процедура [2], що була запропонована у рамках робот по АО, надавала таку можливість. Надалі ця процедура була розширена до повного числення [4] кангерівського типу [3], тобто постала машинно-орієнтованою версією звичайного секвенційного числення [5]. За відсутністю сколемізації це числення значно поступалося у ефективності численням резолюційного типу [7]. Намагання позбутися цього недоліку без застосування сколемізації призвели до появи оригінального поняття допустимої підстановки [8], яке було використане при розробці так званого числення а-секвенцій [9].

В роботі [9] опис числення а-секвенцій мав алгоритмічний характер, що було відходом від стандартної генценівської нотації. Тому під час виконання INTAS-проекту 96-0760 були побудовані різні секвенційні модифікації цього числення [10, 11] з такими характерними рисами: орієнтація на доведення лише однієї цілі; відмова від сколемізації (зі збереженням досить високої ефективності пошуку); відокремлення дедукції від обробки рівностей (розв'язання рівнянь); природні засоби доведення, як застосування означень та допоміжних тверджень; можливість керування пошуком виводу у інтерактивному режимі.

Роботи [10, 11] торкаються усіх цих рис, втім там відсутні міркування щодо того, які переваги та недоліки має та чи інша стратегія пошуку виводу у численні а-секвенцій. Ця робота має за мету частково заповнити цю ваду. Помітимо, що розглянуті у роботі дві стратегії виявляються істотньо різними вже на рівні пропозиційної логіки. У зв'язку з цим ми вважаємо корисним подати ці стратегії у вигляді спеціальних секвенційних числень. Розглядання обмежується пропозиційною логікою.

Загальні означення

Ми розглядаємо класичну пропозиційну логіку зі зв'язками імплікації ($\supset$), диз'юнкції ($\vee$), кон'юнкції ($\wedge$) та заперечення ($\neg$). Домовимось позначати пропозиційні змінні літерами A, B, C та D, пропозиційні літери (тобто пропозиційні змінні та їхні заперечення) — літерами L и M, формули — літерами F, G, P и Q. Усі літери можуть мати нижні індекси. Знаком '#' будемо позначати порожню формулу, тобто таку, що не містить жодного символа.

Запис $F^{\neg}$ позначає результат однократного внесення заперечення у формулу F: $(P \supset Q)^{\neg}$ є $P \wedge \neg Q$, $(P \vee Q)^{\neg}$ є $\neg P \wedge \neg Q$, $(P \wedge Q)^{\neg}$ є $\neg P \vee \neg Q$, $(\neg P)^{\neg}$ є P, $A^{\neg}$ є $\neg A$.

Ми визначаємо *додатні* ($P[F^+]$) *та від'ємні* ($P[F^-]$) *входження* формули F у формулу P наступним чином:

I. Завжди виконується $F[F^+]$ та $F[\bar{F}^-]$, де $\bar{F}$ позначає формулу G, якщо F є $\neg G$, інакше — формулу $\neg F$. (Формулу $\bar{F}$ назвемо *доповненням* формули F).

II. Нехай маємо входження формули F у формулу P. Тоді:

$$
\begin{array}{lll}
P[F^+] \Rightarrow (\neg P)[F^-] & \qquad & P[F^-] \Rightarrow (\neg P)[F^+] \\
P[F^+] \Rightarrow (P \wedge Q)[F^+] & & P[F^-] \Rightarrow (P \wedge Q)[F^-] \\
P[F^+] \Rightarrow (Q \wedge P)[F^+] & & P[F^-] \Rightarrow (Q \wedge P)[F^-] \\
P[F^+] \Rightarrow (P \vee Q)[F^+] & & P[F^-] \Rightarrow (P \vee Q)[F^-] \\
P[F^+] \Rightarrow (Q \vee P)[F^+] & & P[F^-] \Rightarrow (Q \vee P)[F^-] \\
P[F^+] \Rightarrow (P \supset Q)[F^-] & & P[F^-] \Rightarrow (P \supset Q)[F^+] \\
P[F^+] \Rightarrow (Q \supset P)[F^+] & & P[F^-] \Rightarrow (Q \supset P)[F^-]
\end{array}
$$

Основним об'єктом у запропонованих численнях є *а-секвенція.* Під а-секвенцією розуміється запис вигляду: $[\Lambda]\ \Gamma \to \Pi$, де Λ, Γ, Π — послідовності формул, можливо, порожні. Формули з Γ назвемо *посилками*, формули з Π — *цілями*, формули з Λ — *оточеними формулами.* У цій роботі ми обмежуємось а-секвенціями, що в них усі оточені формули є літерами, і які містять рівно одну ціль.

Далі ми наводимо означення та основні результати для двох числень а-секвенцій. Обидва вони базуються на загальному підході: коли ціль, що доводиться, певним чином "взаємодіє" з деякою посилкою а-секвенції, породжуються нові цілі. Тому ми називаємо ці числення цілекерованими. У першому численні (позначеному GD-1), "взаємодіюча" посилка видаляється з а-секвенції, і можуть з'явитися нові посилки. У другому численні (позначеному GD-2), множина посилок а-секвенції не змінюється протягом виводу.

Під час пошуку виводу у GD-1 (GD-2) ми будуємо так зване *дерево виводу*. На початку пошуку дерево складається з вхідної а-секвенції. Підпорядковані вузли дерева виводу породжуються згідно правил виводу числення GD-1 (GD-2). Дерева виводу ростуть "згори-вниз" відповідно до порядку застосування правил виводу. Дерево виводу є *деревом доведення*, якщо кожний його лист є аксіомою. Вхідна а-секвенція дерева доведення у GD-1 (GD-2) вважається *вивідною* у GD-1 (GD-2).

Для кожного з розглянутих числень, ми стверджуємо його звідність до секвенційного числення **G** [6] (обмеженого класичною пропозиційною логікою, та позначеному у цій роботі через **Gal**), а також зворотню звідність. Коректність та повнота числень GD-1 та GD-2 є наслідками цієї "взаємозвідності", оскільки числення **Gal** є коректним та повним.

Числення GD-1

Правила розщеплення цілі (РЦ):

$$(\to\supset)_1: \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F \supset G}{[\Lambda]\ \ \Gamma, F \to G} \qquad\qquad (\to\supset)_2: \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F \supset G}{[\Lambda]\ \ \Gamma, \neg G \to \neg F}$$

$$(\to\vee)_1: \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F \vee G}{[\Lambda]\ \ \Gamma, \neg F \to G} \qquad\qquad (\to\vee)_2: \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F \vee G}{[\Lambda]\ \ \Gamma, \neg G \to F}$$

$$(\to\wedge): \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F \wedge G}{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F \qquad [\Lambda]\ \ \Gamma \to G} \qquad\qquad (\to\neg): \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma \to \neg F}{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F^{\neg}}$$

Правила породження нової цілі (ПЦ):

$$(\supset\to)_1: \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma, F[L^-] \supset G, \Delta \to L}{[\Lambda]\ \ \Gamma, (\neg F)[L^+], \Delta \to L \qquad [\Lambda, L^{\neg}]\ \ \Gamma, \Delta \to \neg G}$$

$$(\supset\to)_2: \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma, F \supset G[L^+], \Delta \to L}{[\Lambda]\ \ \Gamma, G[L^+], \Delta \to L \qquad [\Lambda, L^{\neg}]\ \ \Gamma, \Delta \to F}$$

$$(\vee\to)_1: \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma, F[L^+] \vee G, \Delta \to L}{[\Lambda]\ \ \Gamma, F[L^+], \Delta \to L \qquad [\Lambda, L^{\neg}]\ \ \Gamma, \Delta \to \neg G}$$

$$(\vee\to)_2: \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma, F \vee G[L^+], \Delta \to L}{[\Lambda]\ \ \Gamma, G[L^+], \Delta \to L \qquad [\Lambda, L^{\neg}]\ \ \Gamma, \Delta \to \neg F}$$

$$(\wedge\to)_1: \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma, F[L^+] \wedge G, \Delta \to L}{[\Lambda]\ \ \Gamma, F[L^+], G, \Delta \to L}$$

$$(\wedge\to)_2: \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma, F \wedge G[L^+], \Delta \to L}{[\Lambda]\ \ \Gamma, F, G[L^+], \Delta \to L}$$

$$(\neg \to): \qquad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma, \neg(F[L^{\neg}]), \Delta \to L}{[\Lambda]\ \ \Gamma, F^{\neg}[L^{+}], \Delta \to L}$$

Правило закриття за посилкою (ЗП): $\dfrac{[\Lambda]\ \ \Gamma, L, \Delta \to L}{[\Lambda]\ \ \Gamma, L, \Delta \to \#}$

Правило закриття за оточенням (ЗО): $\dfrac{[\Lambda_1, L, \Lambda_2]\ \ \Gamma \to L}{[\Lambda_1, L, \Lambda_2]\ \ \Gamma \to \#}$

Аксіоми числення: $[\Lambda]\ \ \Gamma \to \#$

У процесі пошуку виводу необхідно, щоб кожне застосування правила ПЦ фіксувало знайдене додатнє входження літерної цілі, і наступне застосування правила ПЦ до породженої а-секвенції зверталося саме до тієї посилки, що містить це зафіксоване входження. Доведення теореми 2 проводиться з урахуванням цієї стратегії.

Теорема 1. Якщо а-секвенція $[L_1, \ldots, L_k]\ P_1, \ldots, P_n \to G$ є вивідною у GD-1, то секвенція $L_1, \ldots, L_k, P_1, \ldots, P_n \to G$ є вивідною у **Gal**.

Доведення (схема). Зберігаючи коректність, додаємо до числення **Gal** правило перенесення посилки у ціль з запереченням та доводимо, что будь-яке правило виводу GD-1 відповідає деякій "суперпозиції" правил виводу отриманого розширення **Gal**.

Теорема 2. Нехай $P_1, \ldots, P_n$ — логічно несуперечливий набір формул, і G — деяка формула. Тоді, якщо секвенція $P_1, \ldots, P_n \to G$ є вивідною у **Gal**, то а-секвенція $[\ ]\ P_1, \ldots, P_n \to G$ є вивідною у GD-1.

Доведення (схема). Показуємо, що числення GD-1 відповідає деякій стратегії пошуку виводу у певному розширенні числення **Gal**. Повнота цієї стратегії доводиться індукцією за кількістю бінарних зв'язок у вхідній секвенції.

Наслідок 1 (теорема про коректність та повноту GD-1). Формула F є загальнозначною у класичній пропозиційній логіці тоді і тільки тоді, коли а-секвенція $[\ ] \to F$ є вивідною у численні GD-1.

Доведення. Випливає з коректності та повноти числення **Gal**.

Числення GD-2

Правила розщеплення цілі (РЦ):

$$(\to\supset)_1: \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F \supset G}{[\Lambda]\ \ \Gamma \to G} \qquad\qquad (\to\supset)_2: \quad \frac{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F \supset G}{[\Lambda]\ \ \Gamma \to \neg F}$$

$(\to\vee)_1: \quad \dfrac{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F \vee G}{[\Lambda]\ \ \Gamma \to G}$ $\qquad (\to\vee)_2: \quad \dfrac{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F \vee G}{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F}$

$(\to\wedge): \quad \dfrac{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F \wedge G}{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F \qquad [\Lambda]\ \ \Gamma \to G}$ $\qquad (\to\neg): \quad \dfrac{[\Lambda]\ \ \Gamma \to \neg F}{[\Lambda]\ \ \Gamma \to F^{\neg}}$

Правило породження нової цілі (ПЦ): $\quad \dfrac{[\Lambda]\ \ \Gamma, F[L^{+}], \Delta \to L}{[\Lambda, L^{\neg}]\ \ \Gamma, F, \Delta \to \neg F}$

Правило закриття за посилкою (ЗП): $\quad \dfrac{[\Lambda]\ \ \Gamma, L, \Delta \to L}{[\Lambda]\ \ \Gamma, L, \Delta \to \#}$

Правило закриття за оточенням (ЗО): $\quad \dfrac{[\Lambda_1, L, \Lambda_2]\ \ \Gamma \to L}{[\Lambda_1, L, \Lambda_2]\ \ \Gamma \to \#}$

Аксіоми числення: $\quad [\Lambda]\ \ \Gamma \to \#$

У процесі пошуку виводу необхідно, щоб кожне застосування правила ПЦ фіксувало знайдене додатнє входження літерної цілі, і, щоб під час наступних розщеплень породженої цілі, зафіксоване входження не видалялося з а-секвенції. Доведення теореми 4 проводиться з урахуванням цієї стратегії.

Теорема 3. Якщо а-секвенція $[L_1, \ldots, L_k]\ P_1, \ldots, P_n \to G$ є вивідною у GD-2, то секвенція $L_1, \ldots, L_k, P_1, \ldots, P_n \to G$ є вивідною у **Gal**.

Доведення (схема). Зберігаючи коректність, додаємо до числення **Gal** правило перенесення посилки у ціль з запереченням та доводимо, что будь-яке правило виводу GD-2 відповідає деякій "суперпозиції" правил виводу отриманого розширення **Gal**.

Теорема 4. Нехай $P_1, \ldots, P_n$ — логічно несуперечливий набір формул, і G — деяка формула. Тоді, якщо секвенція $P_1, \ldots, P_n \to G$ є вивідною у **Gal**, то а-секвенція $[\ ]\ P_1, \ldots, P_n, \neg G \to G$ є вивідною у GD-2.

Доведення (схема). Доводимо, що будь-який вивід в GD-1 може бути трансформований у вивід в GD-2 наступним чином: всюди, де правило ПЦ звертається до формули, що не є вхідною посилкою а-секвенції, замінюємо її однією з вхідних посилок, яку надалі розщеплюємо до цієї формули. Оскільки **Gal** зводиться до GD-1 (за теоремою 2), отримуємо твердження теореми.

Наслідок 2 (теорема про коректність та повноту GD-2). Формула F є загальнозначною у класичній пропозиційній логіці тоді і тільки тоді, коли а-секвенція $[\ ]\ \neg F \to F$ є вивідною у численні GD-2.

Доведення. Випливає з коректності та повноти числення **Gal**.

Порiвняння числень

В процесi пошуку виводу у численнях GD-1 чи GD-2, доки цiллю а-секвенцiї є складна (не лiтерна) формула, застосовуються правила розщеплення цiлi.

Коли цiллю а-секвенцiї стає деяка лiтера L, ми спочатку намагаємось знайти її серед оточених лiтер а-секвенцiї та застосувати правило закриття за оточенням. Якщо це не вдається, обираємо серед посилок формулу, що мiстить додатнє входження L. Якщо ця формула є саме лiтерою L, породжуємо аксiому. Iнакше дiємо в залежностi вiд числення, в якому працюємо, GD-1 чи GD-2.

У численнi GD-1, ми послiдовно застосовуємо правила ПЦ, доки ця посилка не буде розщеплена до лiтери. При цьому у деревi виводу можуть з'явитися новi гiлкi, де цiллю буде деяка нова формула, а доповнення лiтери L перейде в оточення.

У численнi GD-2, застосовуючи правило ПЦ, ми не розщеплюємо посилку, а записуємо її у цiль з запереченням, переносячи доповнення L в оточення а-секвенцiї. Множина посилок при цьому не змiнюється.

Головна вiдмiннiсть мiж численнями полягає у тому, що GD-2 дозволяє повторно використовувати вхiднi посилки (в однiй гiлцi дерева виводу), а GD-1 зберiгає та накопичує "невикористанi" породженi посилки. Наступнi приклади мають продемонструвати суттєвiсть цiєї вiдмiнностi.

Визначимо *вагу дерева доведення*, як кiлькiсть а-секвенцiй у ньому. Дерево виводу деякої а-секвенцiї вважається *мiнiмальним*, якщо воно має мiнiмальну вагу серед усiх дерев доведення даної а-секвенцiї.

Приклад 1. Розглянемо клас а-секвенцiй вигляду

$$[\ ]\ (A_1 \wedge \neg A_1) \vee \dots \vee (A_n \wedge \neg A_n) \vee A \to A$$

Побудуємо схему виводу в GD-1 такої а-секвенцiї:

$$\dfrac{[\ ]\ (A_1 \wedge \neg A_1) \vee \dots \vee (A_n \wedge \neg A_n) \vee A \to A}{\dfrac{[\ ]\ A \to A}{[\ ]\ A \to \#} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A]\ \to A_1 \vee \neg A_1}{[\neg A]\ A_1 \to A_1}}{[\neg A]\ A_1 \to \#} \qquad \cdots \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A]\ \to A_n \vee \neg A_n}{[\neg A]\ A_n \to A_n}}{[\neg A]\ A_n \to \#}}$$

Тепер побудуємо схему виводу такої а-секвенцiї в GD-2. Оскiльки множина посилок на протязi виводу не змiнюється, а оточенi литери кожної секвенцiї є доповненнями лiтерних цiлей батькiвських а-секвенцiй, достатньо буде наводити у схемi лише цiлi а-секвенцiй.

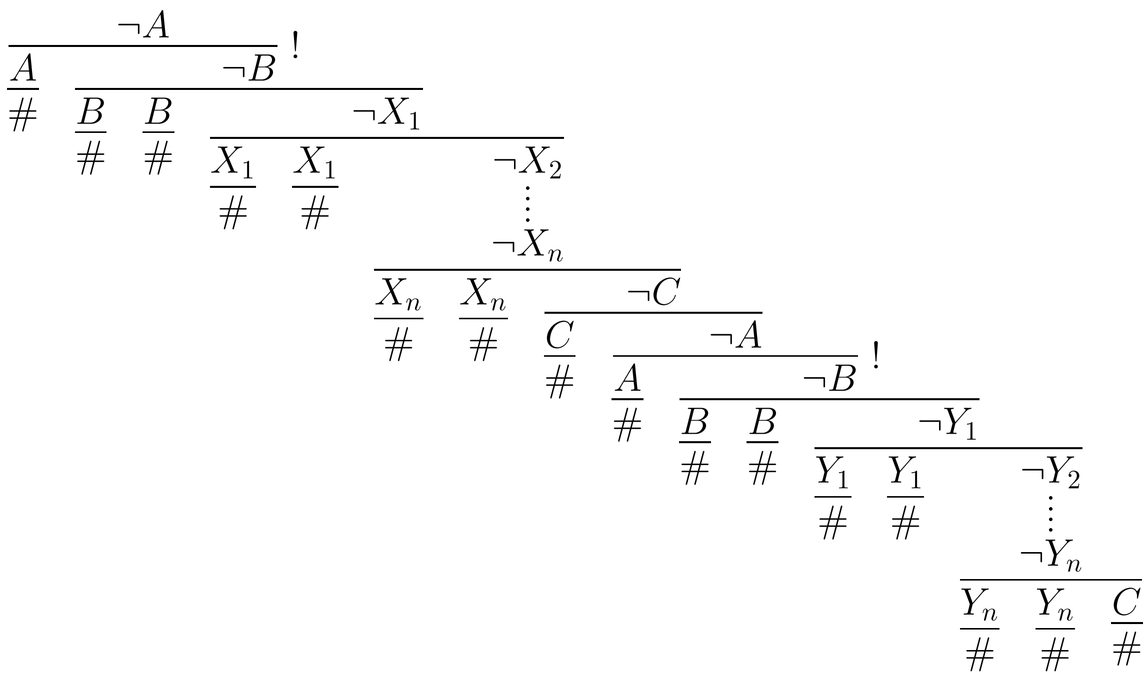
$$\dfrac{A}{\dfrac{\neg A}{\#} \qquad \dfrac{\dfrac{A_1 \vee \neg A_1}{A_1}}{\dfrac{\neg A}{\#} \quad \dfrac{\neg A_1}{\#} \quad \dfrac{A_2}{\dfrac{\neg A_1}{\#} \quad \dfrac{\neg A_2}{\#} \quad \begin{matrix} A_3 \\ \vdots \end{matrix} \quad \cdots \quad \begin{matrix} A_n \\ \vdots \end{matrix}} \quad \cdots \quad \begin{matrix} A_n \\ \vdots \end{matrix}} \qquad \cdots \qquad \begin{matrix} \dfrac{A_n \vee \neg A_n}{A_n} \\ \vdots \end{matrix}}$$

Легко переконатися, що для даного класу а-секвенцій, вага мінімального дерева доведення є лінійною за n в GD-1, та експоненційною за n в GD-2.

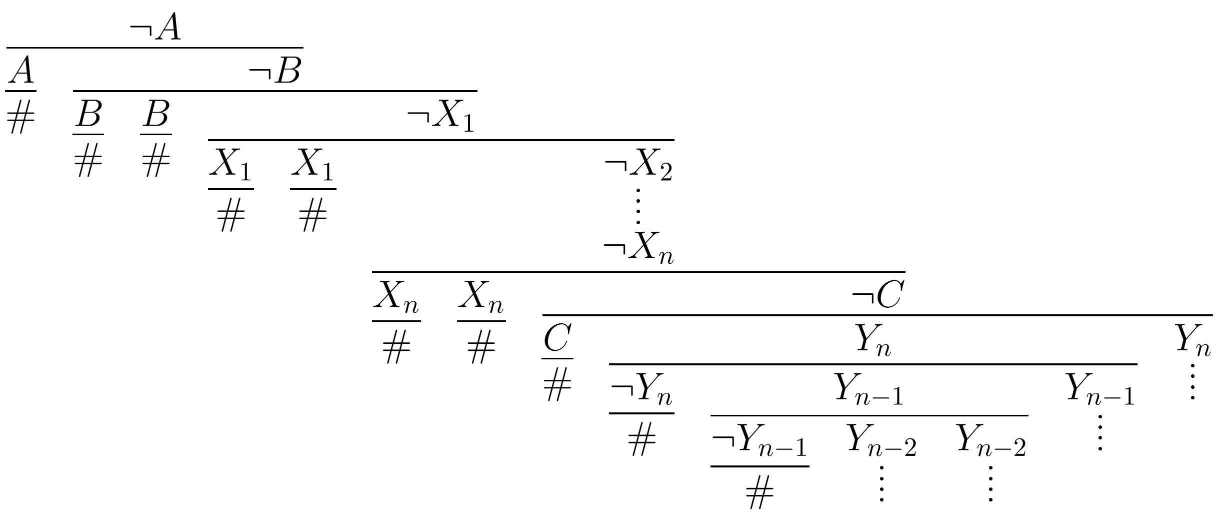
Приклад 2. Розглянемо клас а-секвенцій вигляду

$$[\ ]\ B \supset (B \supset X_1),\ X_1 \supset (X_1 \supset X_2),\ \ldots,\ X_n \supset (X_n \supset C),\ C \supset A,$$
$$B \supset (B \supset Y_1),\ Y_1 \supset (Y_1 \supset Y_2),\ \ldots,\ Y_n \supset (Y_n \supset \neg C),\ A \supset B\ \rightarrow\ \neg A$$

Спочатку побудуємо дерево доведення такої а-секвенції у GD-2. На схемі ми знов обмежимось лише цілями відповідних а-секвенцій. Зауважимо, що посилка $A \supset B$ використовується двічі у одній гілці дерева (відповідні переходи помічені знаком '!'):



Під час виводу такої а-секвенції в GD-1, ми так само проходимо початок цього доведення, однак далі, оскільки ми не можемо повторно використати посилку $A \supset B$, маємо розвертати спростування літери C:



Існують інші варіанти виводу цієї а-секвенції в GD-1, однак можна показати, що жоден з них не породжує меншого дерева доведення. Таким чином, для даного класу а-секвенцій, вага мінімального дерева доведення є лінійною за n в GD-2, та експоненційною за n в GD-1.

Висновок

Проведене порівняння числень показує, що безумовна перевага не може буде надана жодному з них, хоч могло здаватися, що у численні GD-1 маємо завжди отримувати більш "стислі" мінімальні виводи, ніж числення GD-2. Це свідчить про те, що вже синтаксична форма задачи значно впливає на вибір адекватної стратегії.

Література

[1] Глушков В.М. Некоторые проблемы теории автоматов и искусственного интеллекта // Кибернетика. – 1970. – 2.

[2] Ануфриев Ф.В., Федюрко В.В., Летичевский А.А., Асельдеров З.М., Дидух И.И.: Об одном алгоритме поиска доказательства теорем в теории групп // Кибернетика. – 1966. – 1.

[3] Kanger S. Simplified proof method for elementary logic. – Comp. Program. and Form. Sys.: Studies in Logic, North-Holl. Publ. Co., 1963.

[4] Ануфриев Ф.В. Алгоритм поиска доказательства теорем в логическом исчислении // Теория автоматов. – ИК АН УССР, 1969. – 5.

[5] Gentzen G. Untersuchungen uber das Logische Schliessen // Math. Zeit. – 1934. – 39.

[6] Gallier J. Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving. – Harper and Row, Inc. – New York, 1986.

[7] Robinson J. A machine-oriented logic based on resolution principle // Journal of the ACM. – 1965.

[8] Lyaletski A.V. Gentzen calculi and admissible substitutions. – Actes prelim. du Symp. Franco-Sovetigue "Informatika-91". – Grenoble, 1991.

[9] Дегтярев А.И., Лялецкий А.В. Логический вывод в системе автоматизации доказательств // Математические основы систем искуственного интеллекта. – ИК АН УССР, 1981.

[10] Degtyarev A.I., Lyaletski A.V., Morokhovets M.K. Evidence Algorithm and Sequent Logical Inference Search // Lecture Notes in Artificial Intelligence. – 1999. – 1705.

[11] Degtyarev A.I., Lyaletski A.V., Morokhovets M.K. On the EA-style integrated processing of self-contained mathematical texts. – Proc. of the Intern. Workshop CALCULEMUS'2000. – Great Britain, 2000.

Надiйшла до редакцiї 10.04.2001